Correction du Devoir Maison 3

Solution de l'exercice 1.

1. On applique la formule de dérivation. Ici nous avons $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec

$$a = 2 \quad b = 27 \quad c = -216 \quad d = -3024.$$

Donc on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ &= 3 \times 2 \times x^2 + 2 \times 27 \times x - 216 \\ &= 6x^2 + 54x - 216. \end{aligned}$$

2. Le coefficient devant x^2 dans f' vaut 6. On effet pour f' nous avons (à ne pas confondre avec les coefficients de f)

$$a = 6 \quad b = 54 \quad c = -216.$$

Donc $a = 6 > 0$ est donc strictement positif. Ainsi la parabole associée à f' est orientée vers le haut.

3. D'après le cours, nous avons

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{2 \times 6} = \frac{-27}{6} = \frac{-9}{2}.$$

L'abscisse du sommet est donc de $\frac{-9}{2}$, dont on déduit son ordonnée

$$y_S = f(x_S) = f'\left(\frac{-9}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + 54 \times \left(\frac{-9}{2}\right) - 216 = -\frac{675}{2}.$$

Les coordonnées du sommet sont donc $S\left(-\frac{9}{2}; -\frac{675}{2}\right)$.

4. Puisque la parabole est orientée vers le haut, on en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$+\infty$
f'	$+\infty$	$-\frac{675}{2}$	$+\infty$

5. Par définition du discriminant, on a

$$\Delta = b^2 - 4ac = 54^2 - 4 \times 6 \times (-216) = 8100.$$

6. Puisque $\Delta > 0$, on en déduit que f' possède deux racines distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-54 - \sqrt{8100}}{2 \times 6} = -12.$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-54 + \sqrt{8100}}{2 \times 6} = 3.$$

7. Puisque la parabole est orientée vers le haut et qu'elle possède deux racines, dit rapidement elle sera positive puis négative et à nouveau positive. Plus précisément on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-12		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

8. D'après une propriété du cours, la fonction f est décroissante lorsque f' est négative et inversement. Donc de la question précédente, on en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-12		3		$+\infty$
f	$+\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

9. Sans difficulté,

$$f(-12) = -3024 - 216 \times (-12) + 27 \times (-12)^2 + 2 \times (-12)^3 = 0.$$

et

$$f(3) = -3024 - 216 \times 3 + 27 \times 3^2 + 2 \times 3^3 = -3375.$$

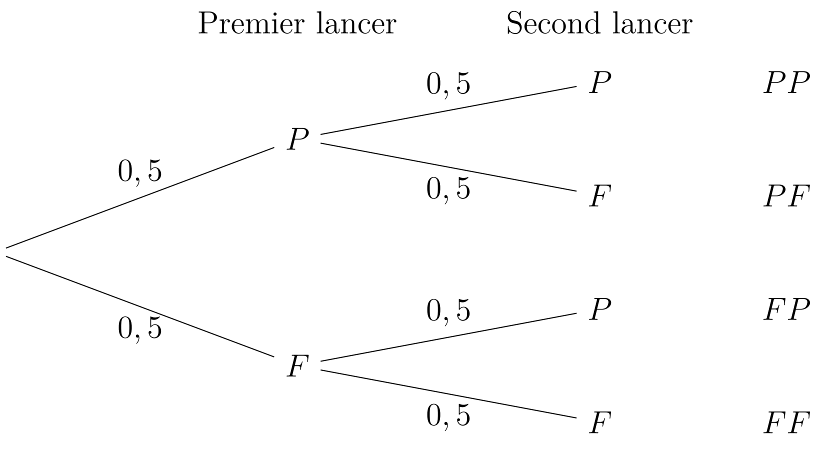
Le tableau complet est donc

x	$-\infty$		-12		3		$+\infty$
f	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3375	$\nearrow$	$+\infty$

10. D'après le tableau de variation de la question précédente, on constate que f admet un maximum sur $]-\infty;3]$ atteint en -12 qui vaut 0. Donc pour tout $x \in]-\infty;3]$, $f(x) \leqslant 0$. Ainsi on en déduit que f est négative sur $]-\infty;3]$.

Solution de l'exercice 2.

1. Puisque l'on répète à l'identique et de façon indépendante la même expérience de Bernoulli (le lancer d'une même pièce) dans les deux cas, on obtient un loi binomiale. Pour la pièce A, puisqu'elle est équilibrée, les paramètres sont n et $p = 0,5$. Pour la pièce B, les paramètres sont n et $p = \frac{1}{10} = 0,1$. Pour résumer X_n suit une loi $\mathscr{B}(n, 0.5)$ et X'_n une loi $\mathscr{B}(n, 0.1)$.
2. Si $n = 2$, on obtient alors $u_2 = \mathbb{P}\left(X_2 = \frac{2}{2}\right) = \mathbb{P}(X_2 = 1)$. Le nombre u_2 est donc la probabilité d'obtenir après deux lancers un seul succès avec la pièce équilibrée.
3. L'arbre associé aux deux lancers d'une pièce équilibrée est :



4. Pour obtenir $X_2 = 1$, il nous faut obtenir un pile et un seul pile. On en déduit donc que

$$\{X_2 = 1\} = \{PF, FP\}.$$

5. Grâce aux questions précédentes et notamment une lecture de l'arbre :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(PF) + \mathbb{P}(FP) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,25 + 0,25 = 0,5.$$

On pouvait également invoquer le fait que nous sommes dans un cas où toutes les issues ont la même probabilité (cas *équiprobable*) et que donc **dans ce cas** il suffit de compter les issues. $\{X_2 = 1\}$ contient deux issues sur les quatre possibles donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = 2/4 = 0,5$.

6. Dans le cas de v_2 par définition, on a $v_2 = \mathbb{P}\left(X_2 = \frac{2}{10}\right) = \mathbb{P}(X_2 = 0,2)$. Cela revient à trouver la probabilité d'obtenir $0,2$ succès ce qui n'a pas réellement de sens.

7. En utilisant la commande *binomFdp(10,0.5,5)* on obtient

$$u_{10} = \mathbb{P}\left(X_{10} = \frac{10}{2}\right) = \mathbb{P}(X_{10} = 5) = binomFdp(10, 0.5, 5) \simeq 0,246.$$

D'autre part,

$$v_{10} = \mathbb{P}\left(X_{10} = \frac{10}{10}\right) = \mathbb{P}(X_{10} = 1) = binomFdp(10, 0.5, 1) \simeq 0,01.$$

On note que $u_{10} > v_{10}$.

8. On fait de même en changeant $p = 0,5$ en $p = 0,1$. On obtient alors

$$u'_{10} = \mathbb{P}\left(X'_{10} = \frac{10}{2}\right) = \mathbb{P}(X'_{10} = 5) = binomFdp(10, 0.1, 5) \simeq 0,387.$$

D'autre part,

$$v'_{10} = \mathbb{P}\left(X'_{10} = \frac{10}{10}\right) = \mathbb{P}(X_{10} = 1) = binomFdp(10, 0.1, 1) \simeq 0,001.$$

Cette fois-ci, on remarque que l'ordre est inversé $u'_{10} < v'_{10}$.

9. En poursuivant les calculs de la même façon, on obtient :

n	10	20	30	40	50
u_n	$0,246$	$0,176$	$0,144$	$0,125$	$0,112$
v_n	$0,01$	2.10^{-4}	4.10^{-6}	8.10^{-8}	2.10^{-9}
u'_n	0.001	6.10^{-6}	3.10^{-8}	2.10^{-10}	9.10^{-13}
v'_n	$0,387$	$0,285$	$0,236$	$0,206$	$0,185$

10. Toutes les suites décroissent mais l'on observe que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ devient beaucoup plus petite beaucoup plus rapidement que $(u_n)_{n\geqslant 2}$. Au contraire la suite $(v'_n)_{n\geqslant 2}$ devient plus petite beaucoup moins rapidement que $(u'_n)_{n\geqslant 2}$.
11. On sait que plus n est grand plus X_n et X'_n se resserrent près de leurs espérances respectives. X_n a donc plutôt tendance à être proche de $\mathbb{E}\left(X_n\right) = np = \frac{n}{2}$ ce qui explique que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est plus grande que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tandis que X'_n a plutôt tendance à être proche de $\mathbb{E}\left(X'_n\right) = \frac{n}{10}$ ce qui explique pourquoi $(v'_n)_{n\geqslant 2}$ est plus grande que $(u'_n)_{n\geqslant 2}$.